FCE více proměnných : opakování

1) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Př. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y}{e^z} \in \mathbb{R}$

funkce má d nezávisle proměnných.

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. Př. $\varphi(t) = (R\cos t, R\sin t)$

Jiný zápis : $\varphi : \left[\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{array} \right.$

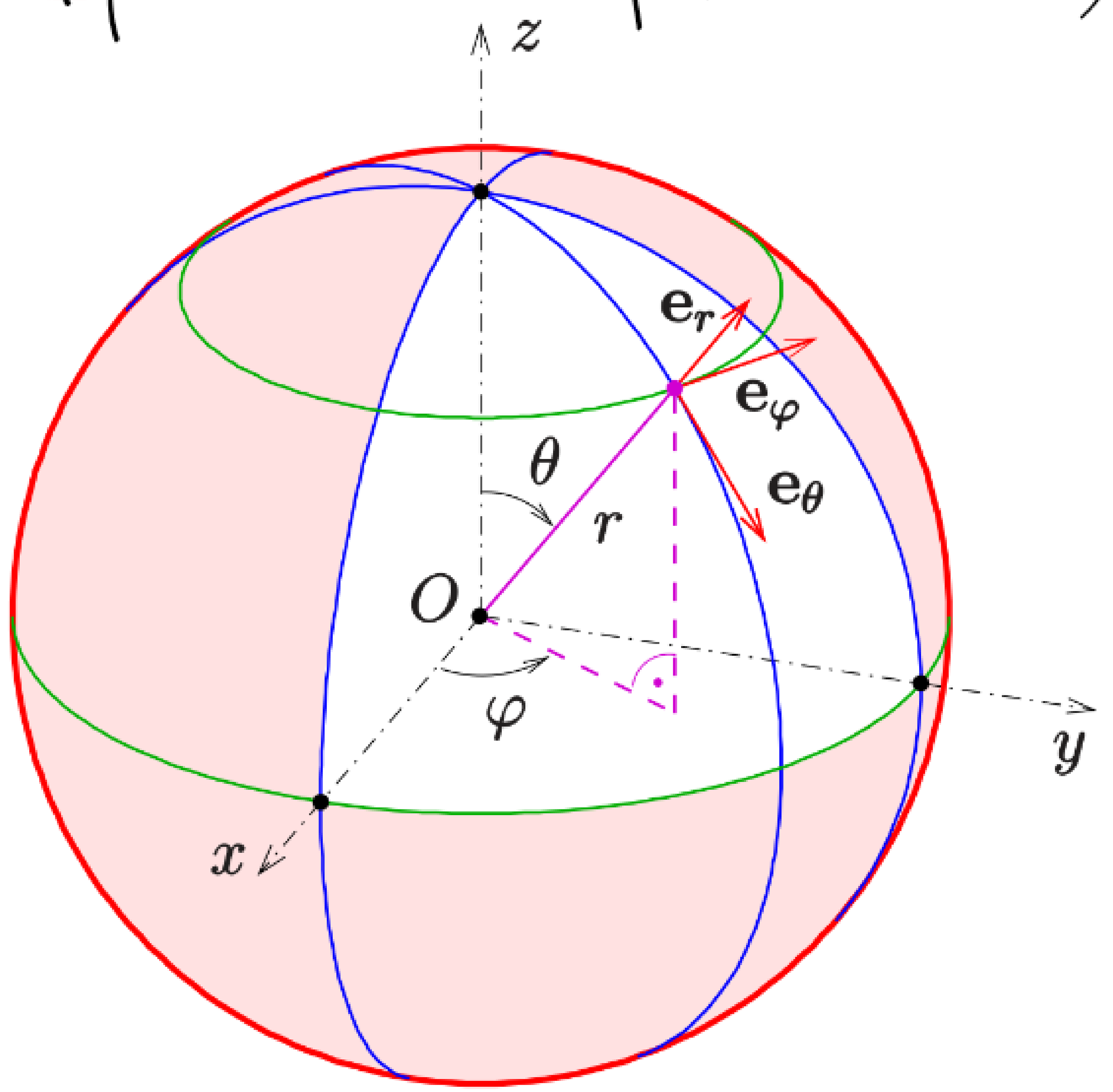
3) $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$.

Př. $F(\theta, \varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, \; r\sin\theta\sin\varphi, \; r\cdot\cos\theta)$

Tj. $F : \quad x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

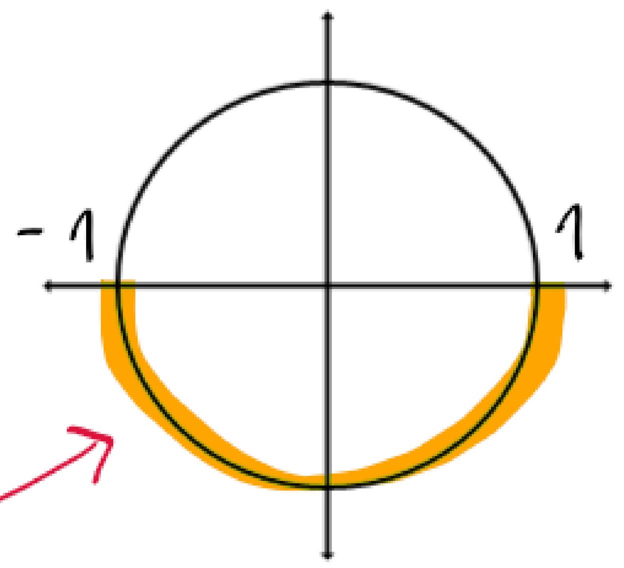


- Pro r pevné: param. sféry!
- r proměnná : $F(r, \theta, \varphi)$

Křivky (i plochy) se dají zadat více způsoby

a) parametricky (příklady vlevo)

b) explicitně (jako grafy funkcí):



$-\sqrt{1-x^2}$

c) implicitně (rovnicí): 1-kružnice: $x^2+y^2=1$

resp. 1-sféra: $x^2+y^2+z^2=1$

Tj. $\underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)} = 1$ resp. $\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g(x,y,z)} = 1$

$f(x,y) = 1 \qquad g(x,y,z) = 1$

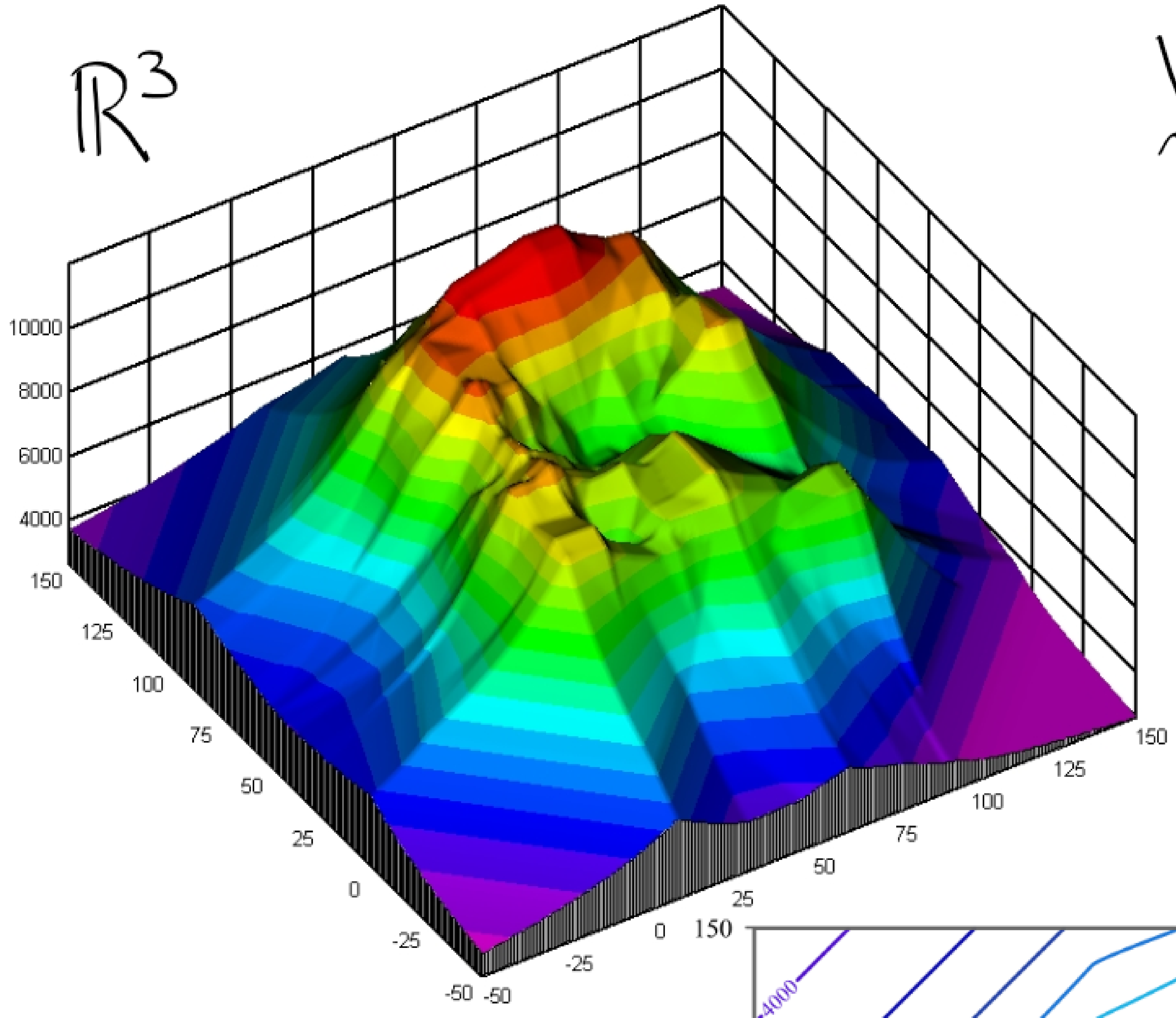
Jde o množinu všech bodů splňujících jistou rovnici

„1-kružnice" $= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} =$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=1\}$

VRSTEVNICE!

$\mathbb{R}^3$



WIKI:

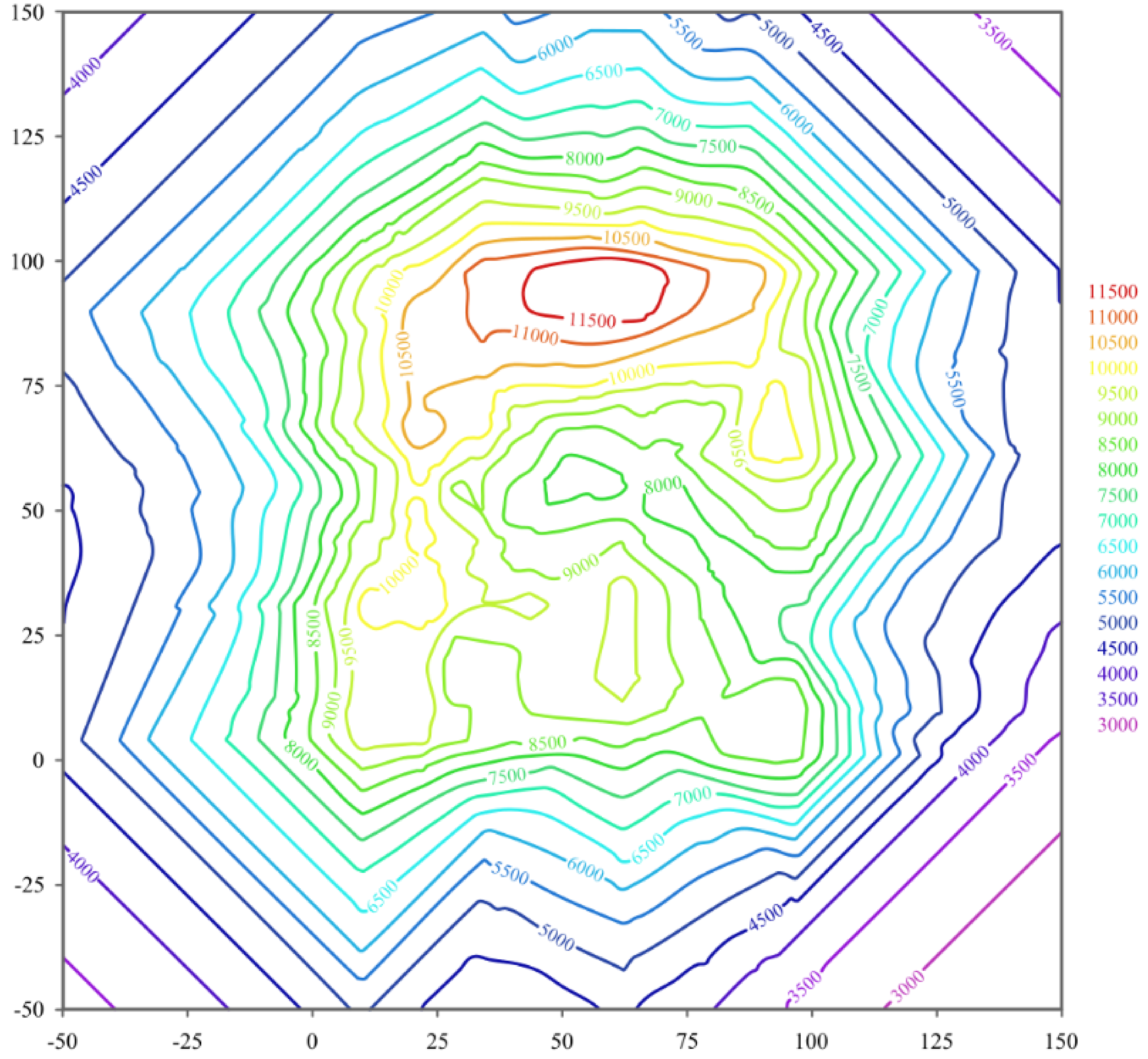
graf funkce

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

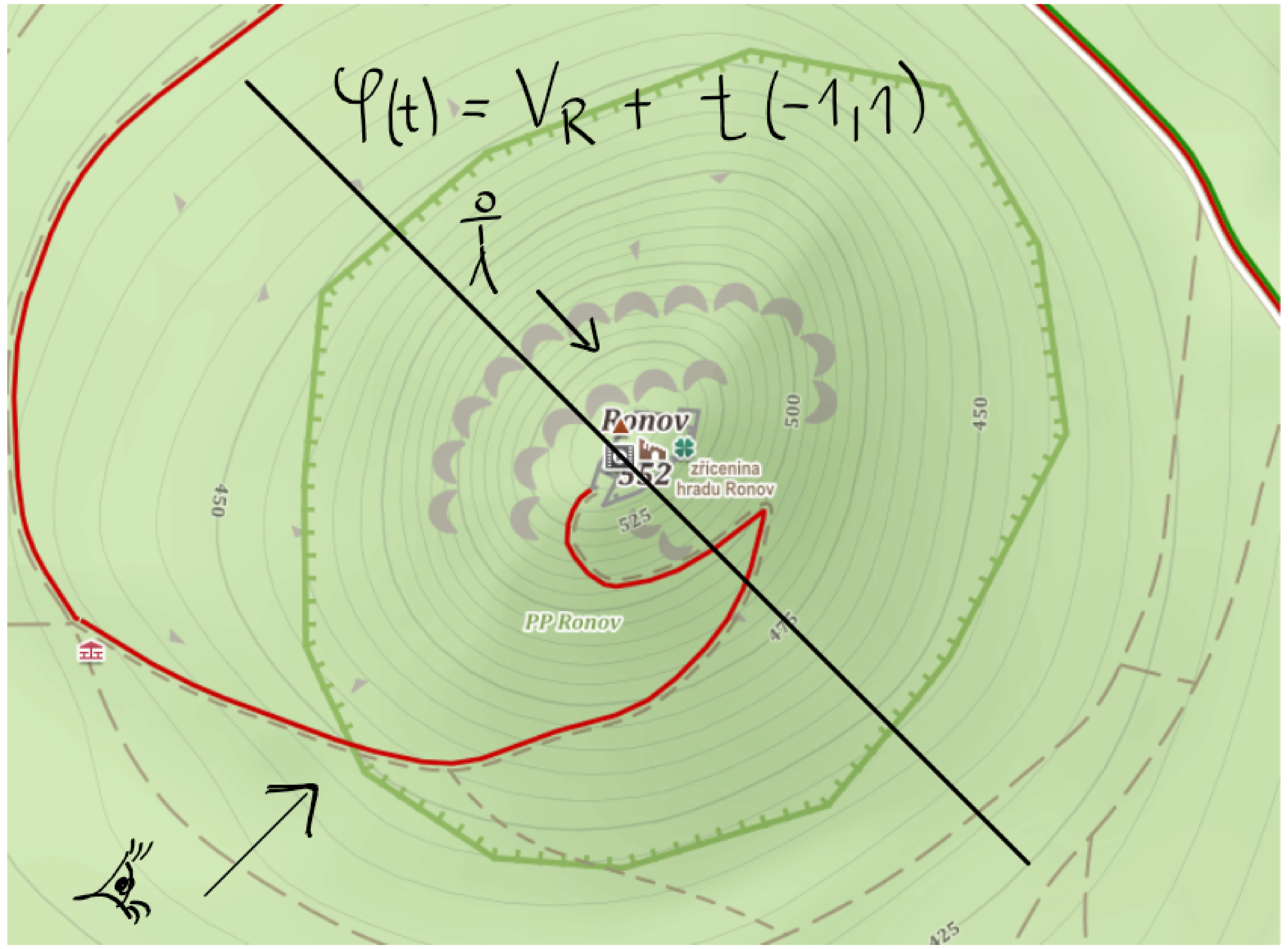
$G_{f \restriction [-50,150] \times [-50,150]}$

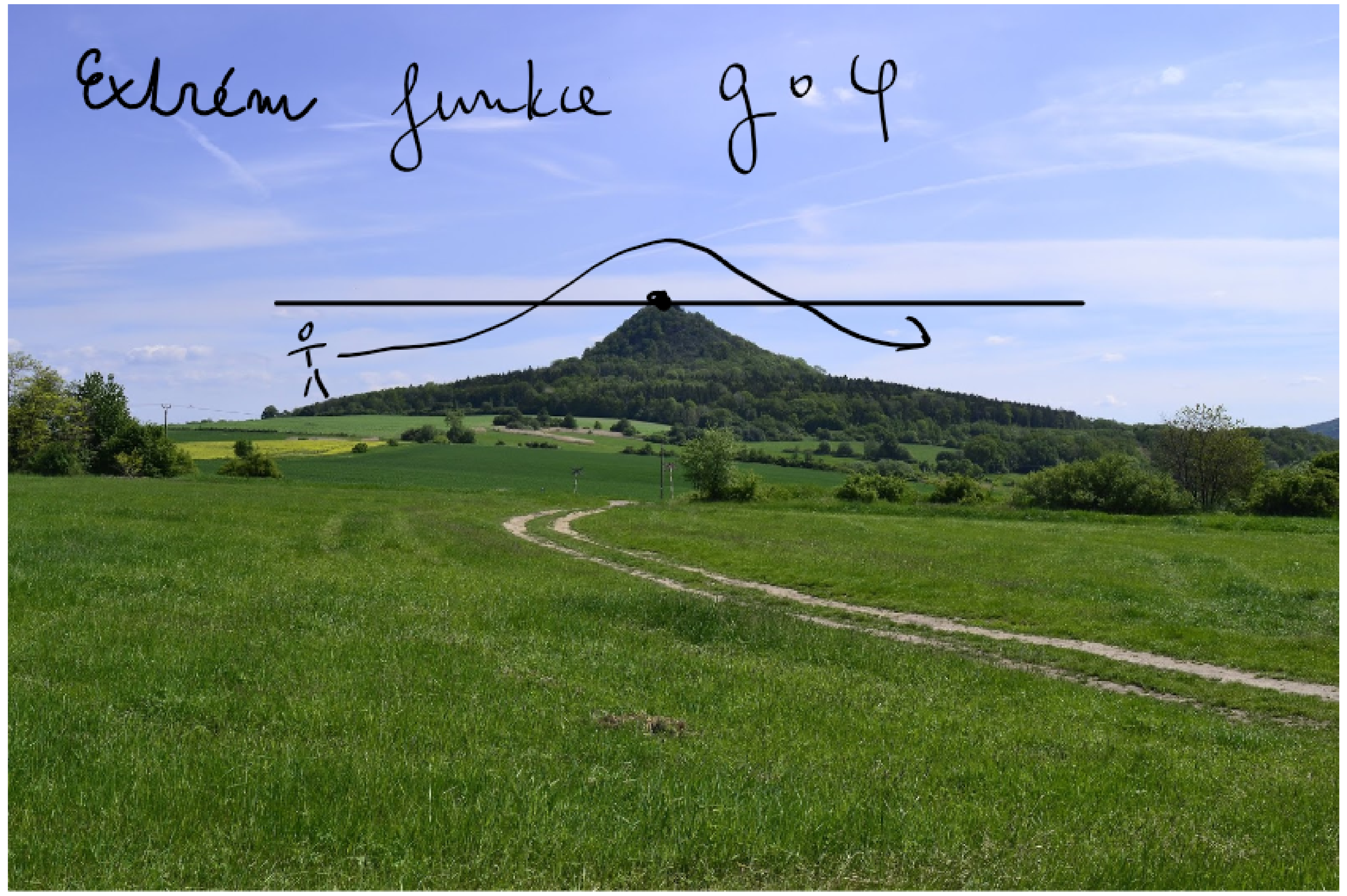
$\mathbb{R}^2$

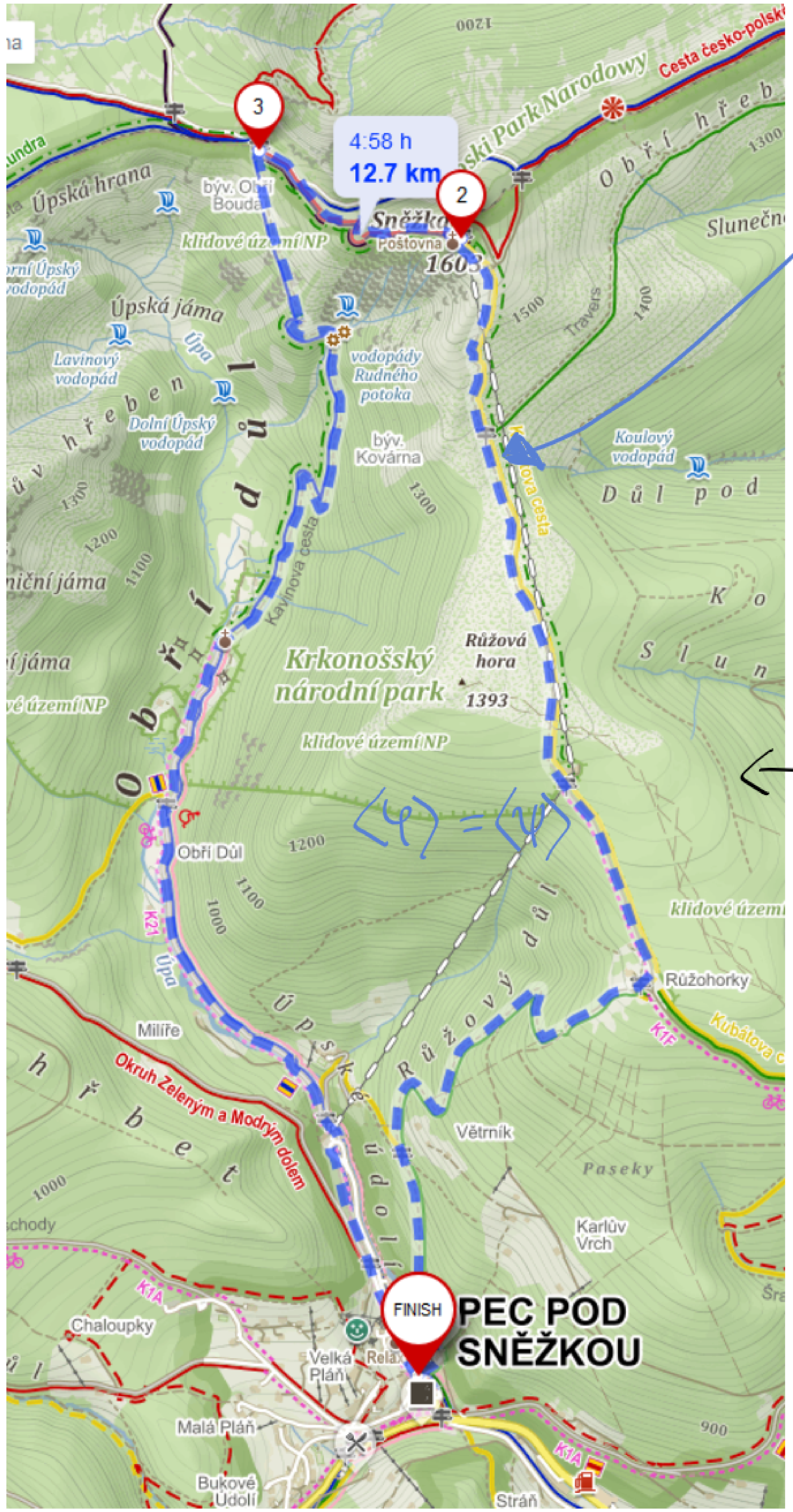
Příslušné vrstevnice



Můj oblíbený kopec Ronov: Funkce $g(x,y)$







Trasa: (uzavřená) křivka

$$\varphi : [8{:}00,\, 12{:}58] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t_0) = \varphi(8{:}00) = PpS$$

$$\varphi(t_K) = \varphi(12{:}58) = -\,\|\,- .$$

$\langle \varphi \rangle = \langle \psi \rangle$

Krajina:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

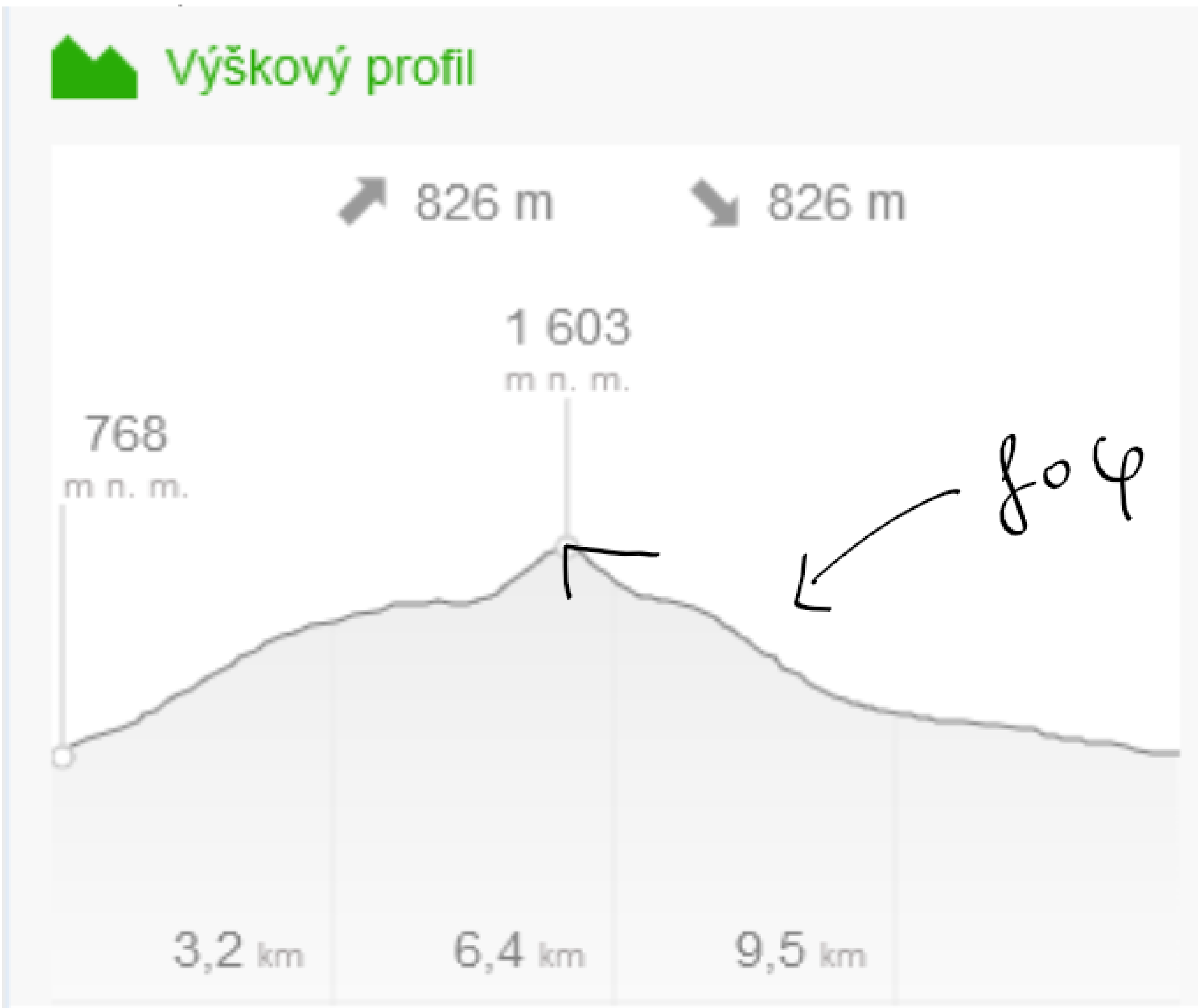
souřadnice m n.m.

Složená funkce $f \circ \varphi$:

$$[8{:}00,\, 12{:}58] \xrightarrow{\varphi} \text{Krkonoše} \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \text{ tj.}$$

$$f \circ \varphi : [8{:}00,\, 12{:}58] \longrightarrow \mathbb{R}$$

„čas" $\longmapsto$ nadmořská výška



$f \circ \varphi$

Trajektorie $\langle \varphi \rangle = \langle \psi \rangle$

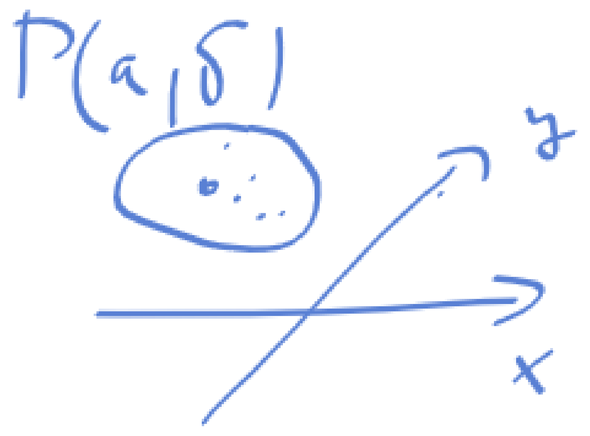
POZOR: Trochu nepřesné. Zde je parametrizace vzdáleností, tj. $\psi : [0\,\text{km},\, 12{,}7\,\text{km}] \to \mathbb{R}^2$; $f \circ \psi$.

Už vážně: Připomeň: $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

- $\|x\|_e = \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (Pyth. věta)

  $\rho_e(x,y) = \|x-y\|_e$ … eukleid. vzdálenost

- $B(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho(x,a) \boxed{<} \varepsilon\}$.



  $P(a,\varepsilon) = B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$.

- $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^k$. Pak

  $\lim\limits_{x\to a} F(x) = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in P(a,\delta): F(x) \in B(A,\varepsilon)$

  (jako 1. semestr)

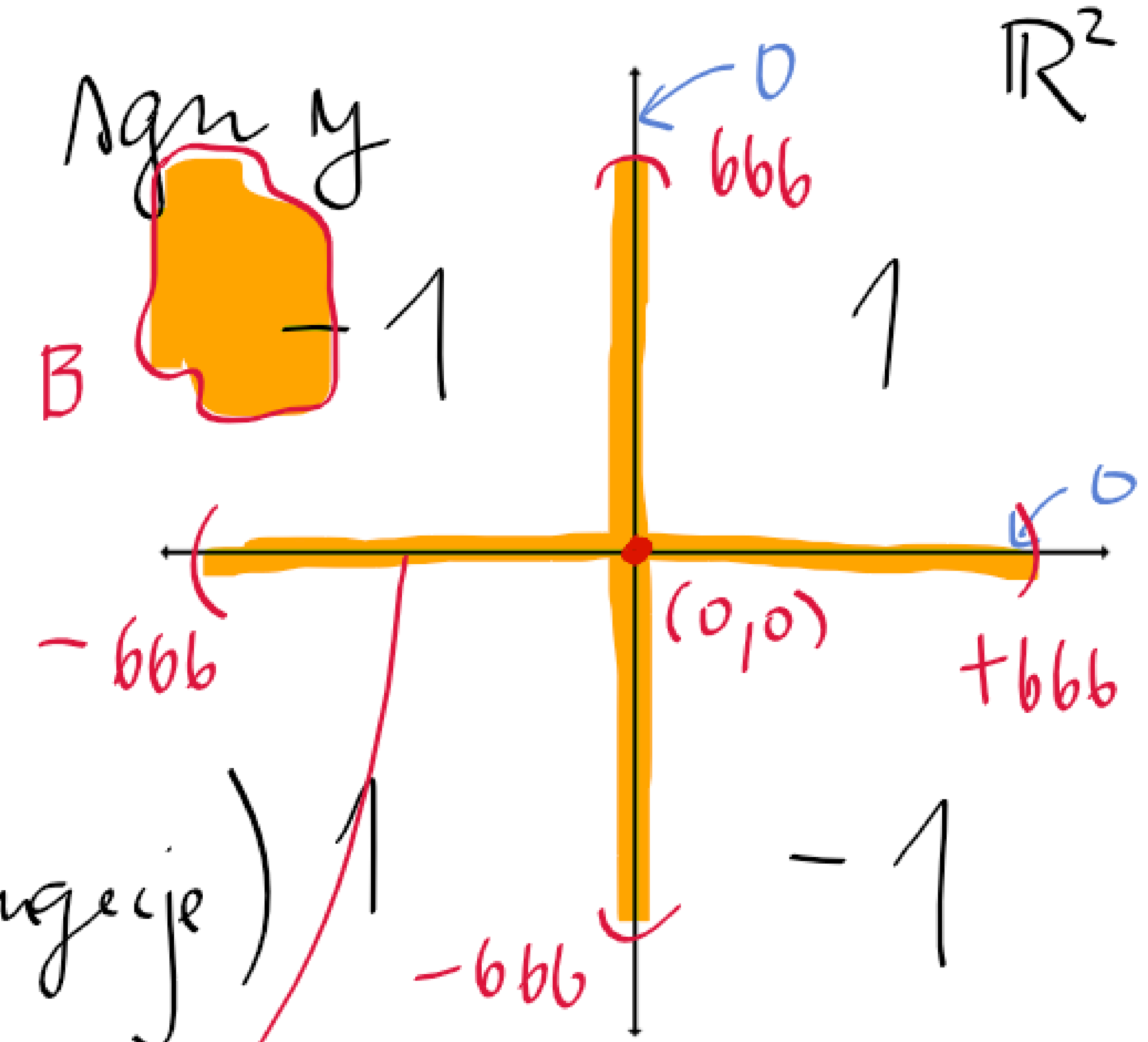
- Limita je jednoznačná (lehký důkaz).

- $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in M$, $F: G \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$

  je spoj. v a vzhledem k M $\overset{\text{def}}{\iff}$

  $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \boxed{x} \in B(a,\delta) \boxed{\cap M}: F(\boxed{x}) \in B(F(a),\varepsilon)$

Příklad: $f(x,y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$ $\mathbb{R}^2$



- f není spoj. vzhl. $\mathbb{R}^2$ v bodě $(0,0)$

  (Tj. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ … žádné δ nefunguje)

- f je spoj. v bodě $(0,0)$ vzhledem k

  množině $\underbrace{\{x=0\}}_{\text{osa } y} \cup \underbrace{\{y=0\}}_{\text{osa } x} =: M_1$

  umělé omezený D_f

  $f|_{M_1} \equiv 0$. Je spojitá (triviální).

  $\forall \varepsilon>0\ \underbrace{\exists \delta>0}_{\text{Třeba: } 666}\ \forall x \in \boxed{B((0,0),666) \cap M_1}:$

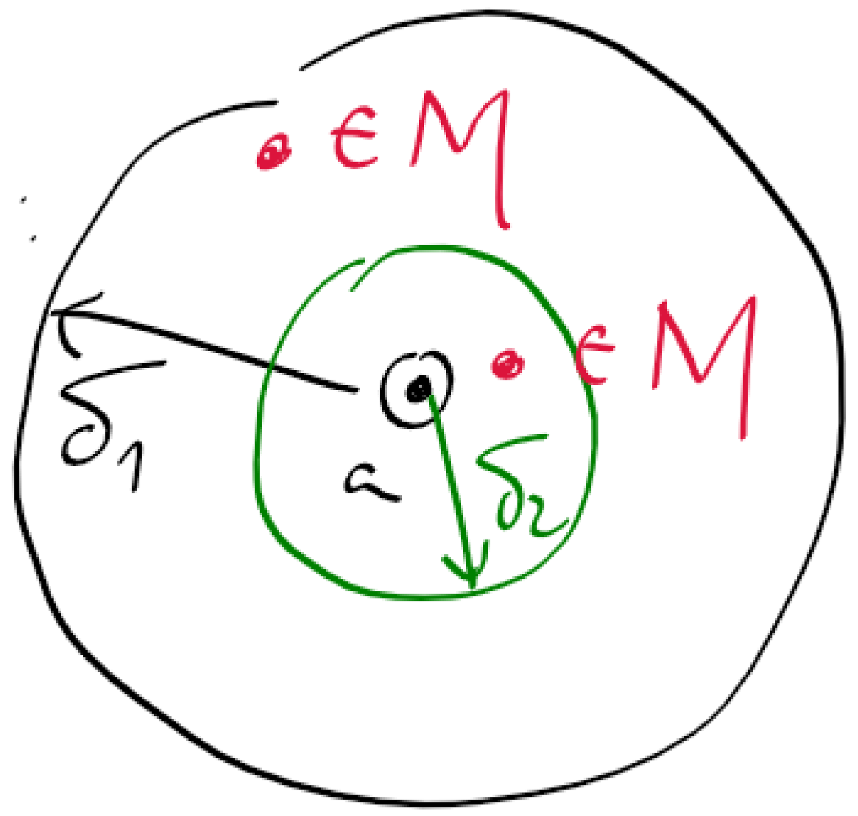
  $f(x) = \underset{f((0,0))}{0} \in B(0,\varepsilon)$ ✓

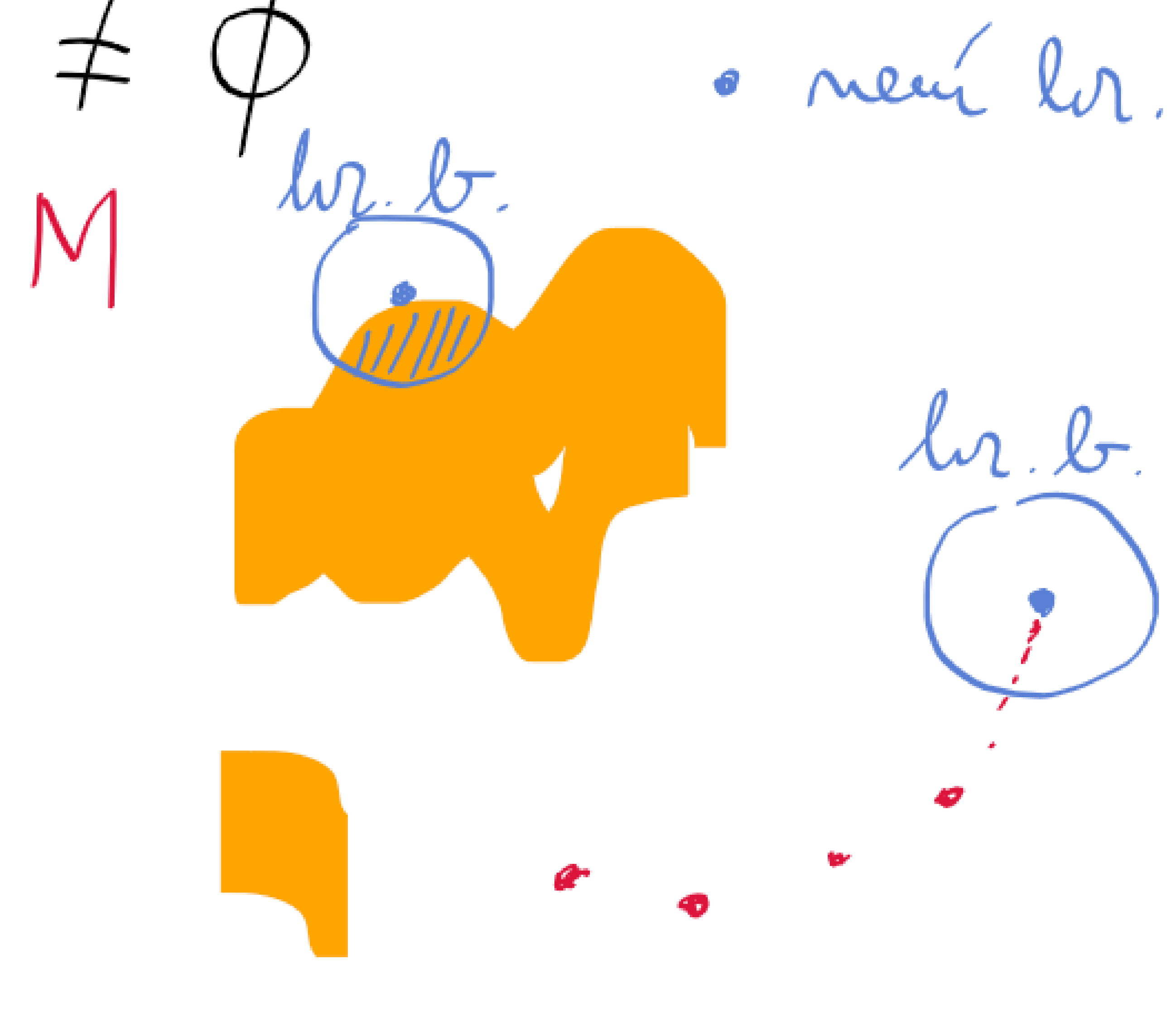
- $M_2 :=$ osa x ∪ osa y ∪ B. f je spoj. v $(0,0)$ vzhl. k M_2

Definice 3: (hromadný bod) nechť ($d \in \mathbb{N}$) $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$. Řekneme, že a je hromadný bod M, jestliže

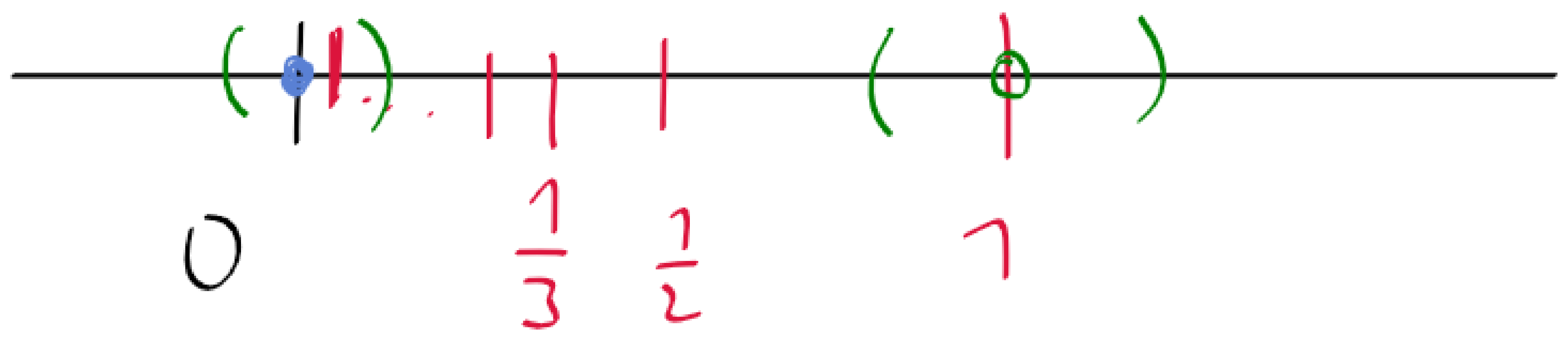
$$\forall \delta > 0 : P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$$

Obrázek:





Příklad: • $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} =: M$



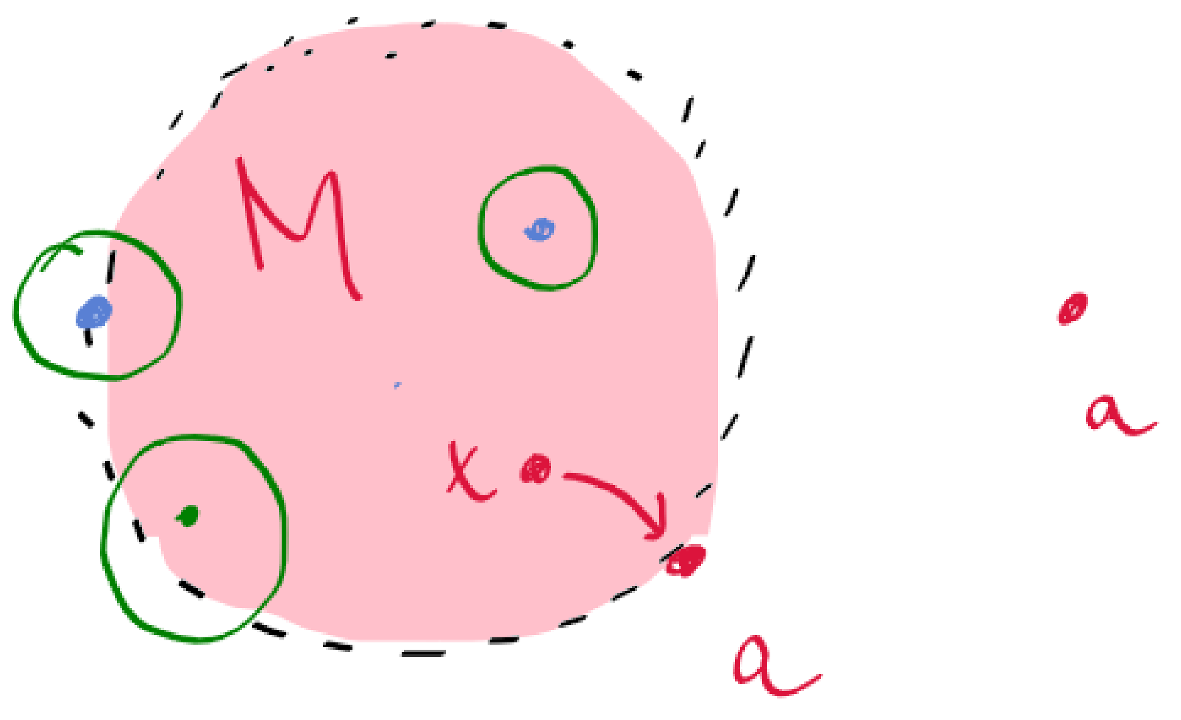
0 je hromadný bod M (jediný)

Značení: • $M' = \{ x \in \mathbb{R}^d : x \text{ je hr. b. } M \}$

• $a \in M \setminus M'$ se nazývá izolovaný b. M

Příklad: $M := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$

$M' = ?$



$M' \supseteq \{ x^2 + y^2 = 1 \}$

Zřejmě $M' = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \}$.

Definice 4: nechť $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in M'$, $A \in \mathbb{R}^k$, $F : G \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. Řekneme, že

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} F(x) = A \overset{\text{def}}{\iff}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P(a,\delta) \cap M : F(x) \in B(A,\varepsilon)$$

Pozn.: • Pro $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lze definovat

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = \infty \quad (\text{resp. } -\infty):$$

stačí uvažovat $B(\infty,\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon},\infty\right) \subseteq \mathbb{R}$

resp. $B(-\infty,\varepsilon) = \left(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}\right)$

a použít D4.

• Podobně lze definovat pro $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^k$

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) \quad \left(\text{resp. } \lim_{t\to-\infty}\varphi(t)\right)$$

stačí $P(\infty,\varepsilon) = B(\infty,\varepsilon)$

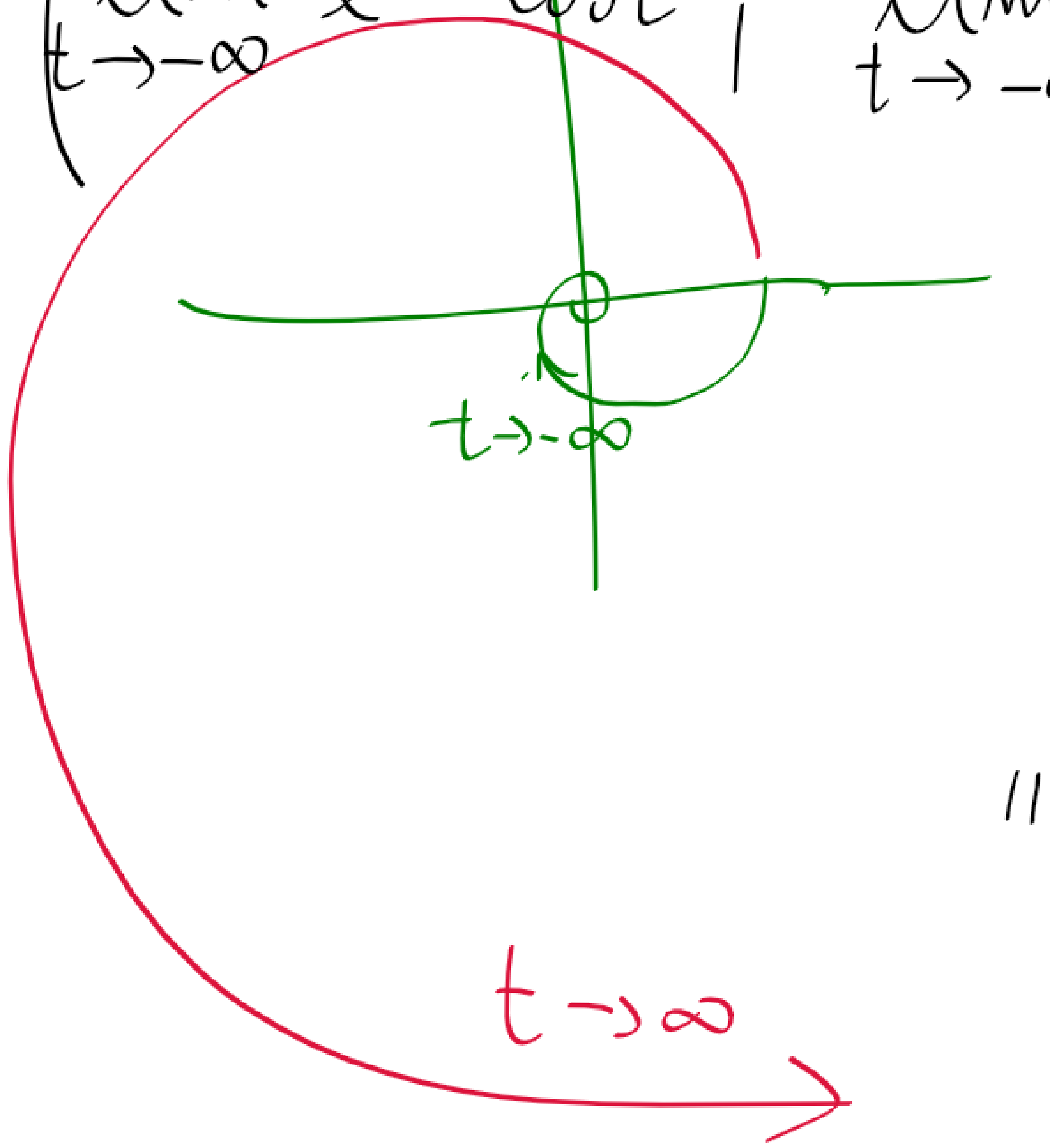
$P(-\infty,\varepsilon) = B(\infty,\varepsilon)$.

Příklad: • $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{1}{x^2+y^2}} = +\infty$ (ú.)

• $$\lim_{t\to-\infty}\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\right) = \lim_{t\to-\infty}\left(x(t),y(t)\right) =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\Big(\underbrace{e^{+t}\cos t,\ e^{+t}\sin t}_{\text{spirála}}\Big) \underset{\text{snadné}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \left(\lim_{t\to-\infty} e^{t}\cos t,\ \lim_{t\to-\infty} e^{t}\sin t\right) \underset{\text{„nulová · omezená"}}{\overset{\uparrow}{=}} (0,0)$$



„$\lim_{r\to0+}\frac{1}{r} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$"

Věta 5: Platí („se stejným důkazem") analogie známých vět o spoj. a lim. fcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Speciálně

(i) Jednoznačnost limity, omezenost funkce na okolí toho bodu.

(ii) VOAL

(iii) lim a nerovnosti, LO2P, „omez. $\cdot\, 0 = 0$"

(iv) Heine: $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in M'$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} F(x) = A^{\in \mathbb{R}^k} \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^d :$$

$$x_n \to a \ \wedge \ x_n \in M \setminus \{a\} \implies$$

$$\lim F(x_n) = A \in \mathbb{R}^k$$

(v) spoj. a lim.:

F je spoj. v a vzhl. k M $\iff \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} F(x) = F(a)$

(vi) VOLSF (s podmínkou (P), nebo (S))

(vii) Spojitost složeného zobrazení:

$$\left.\begin{aligned} &F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k \text{ spoj. na } M_1 \\ &G: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell \text{ spoj. na } M_2 \\ &F(M_1) \subseteq M_2 \end{aligned}\right\} \implies$$

$\implies G \circ F$ je spoj. na M_1

Definice 6: F z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^k$:

(i) F je izometrie na $M \overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall x, y \in M: \ \rho(F(x), F(y)) = \rho(x, y)$$

(ii) F je lipschitzovské na M s konstantou lipschitzovskosti $C \geq 0$, pokud

$$\forall x, y \in M: \ \rho(F(x), F(y)) \leq C \cdot \rho(x, y)$$

Lemma 7: F lip na $M \Rightarrow F$ je spoj. na M.

Důkaz: nechť $a \in M$. $\varepsilon > 0$ lib.

Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ kde c je konstanta lip. F. nechť $x \in B(a, \delta) \cap M$

Chceme: $F(x) \in B(F(a), \varepsilon)$.

$$\rho(F(x), F(a)) \overset{\text{lip.}}{\leq} c \cdot \rho(x, a) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon. \quad \boxtimes$$